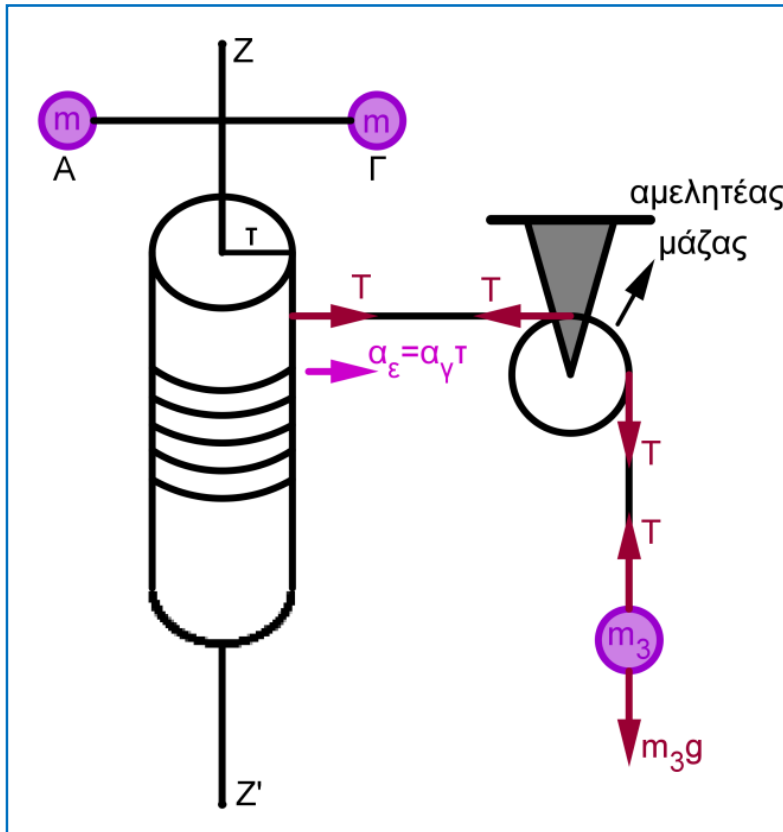


ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο



МЕХАНИКА

ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

«Όλη η επιστήμη είναι είτε Φυσική είτε συλλογή γραμματοσήμων.»

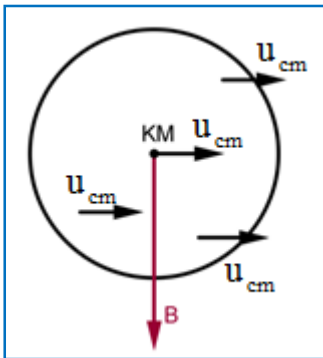
Lord Kelvin, 1824-1907, Άγγλος επιστήμονας

3. ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

3.1. Μεταφορική Κίνηση.

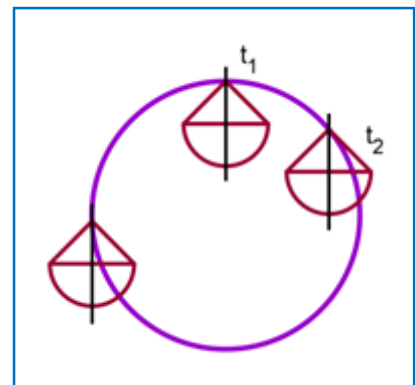
Έχουμε δύο ορισμούς:

1. Είναι η κίνηση που κάθε σημείο του σώματος έχει την ίδια ταχύτητα με την ταχύτητα που έχει το κέντρο μάζας και συμβολίζεται με u_{cm} ή u_{KM} .



u_{cm} = Η ταχύτητα λόγω μεταφορικής κίνησης

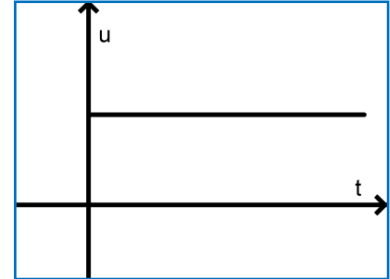
2. Όταν η ευθεία που ορίζουν δύο σημεία του σώματος για διαφορετικές χρονικές στιγμές παραμένει παράλληλη με την αρχική ευθεία τότε η κίνηση λέγεται μεταφορική.



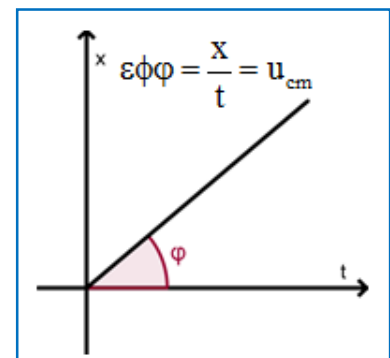
3.2. Εξισώσεις μεταφορικής κίνησης.

✧ Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση (ΕΟΚ)

α) $u_{cm} = \text{σταθερή}$



β) $x = u_{cm} t$

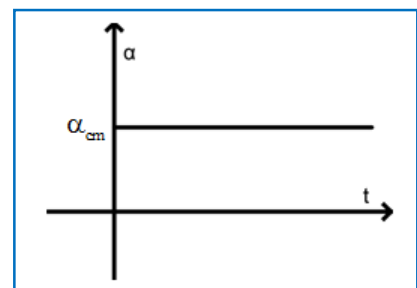


γ) $\Sigma F = 0$ (στον άξονα κίνησης)

✧ Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη

α) $\alpha_{cm} = \text{σταθερή}$

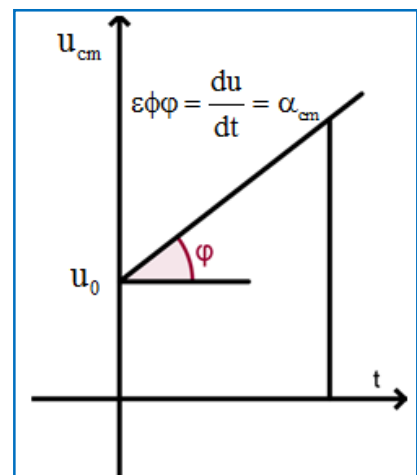
$\alpha_{cm} = \frac{du_{cm}}{dt}$ (ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας)



β) Τελική ταχύτητα = αρχική ταχύτητα + $\alpha \Delta t$
(όπου Δt = διαφορά χρόνου μεταξύ της τελικής – αρχικής ταχύτητας)

$$u_{cm} = u_0 + \alpha_{cm} t$$

Το εμβαδόν του σχήματος που ορίζεται μεταξύ της ευθείας και του άξονα t μας δείχνει το διάστημα που διανύει το κινητό u_0 μέχρι τη χρονική στιγμή t .



$$\text{Εμβαδόν(σχήματος)} = \text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ} = x \quad \text{και} \quad E_{\text{τραπέζιου}} = \frac{\beta + B}{2} \upsilon$$

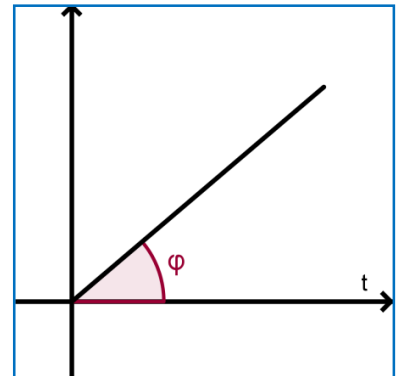
$$\text{Εάν } u_0 = 0 \text{ τότε } u_{\text{cm}} = \alpha_{\text{cm}} t$$

$$\varepsilon\phi\phi = \frac{du_{\text{cm}}}{dt} = \alpha_{\text{cm}}$$

$$E_{\text{τριγώνου}} = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2} = x$$

$$\gamma) \quad x = u_0 t + \frac{1}{2} \alpha_{\text{cm}} t^2$$

$$\text{Εάν } u_0 = 0 \text{ τότε } x = \frac{1}{2} \alpha_{\text{cm}} t^2$$

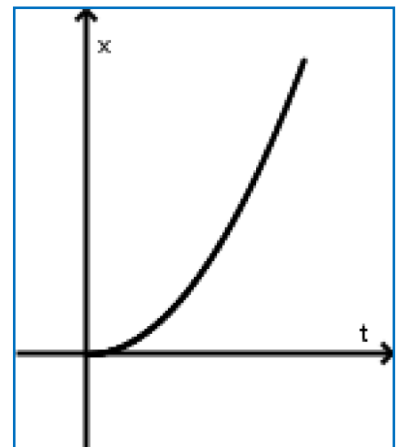


$$\delta) \quad \Sigma F = m \cdot \alpha_{\text{cm}} \text{ (στον άξονα κίνησης)}$$

$$\epsilon) \quad \text{Σχέση που συνδέει } x, u_0, u_{\text{cm}}, \alpha_{\text{cm}}$$

$$x = \frac{u_{\text{cm}}^2 - u_0^2}{2\alpha_{\text{cm}}}$$

(χρησιμοποιείται όταν δεν δίνεται ο χρόνος)



Απόδειξη

$$u_{\text{cm}} = u_0 + \alpha_{\text{cm}} t \Leftrightarrow u_{\text{cm}} - u_0 = \alpha_{\text{cm}} t \Leftrightarrow t = \frac{u_{\text{cm}} - u_0}{\alpha_{\text{cm}}}$$

$$x = u_0 t + \frac{1}{2} \alpha_{\text{cm}} t^2 \Leftrightarrow x = u_0 \left(\frac{u_{\text{cm}} - u_0}{\alpha_{\text{cm}}} \right) + \frac{1}{2} \alpha_{\text{cm}} \left(\frac{u_{\text{cm}} - u_0}{\alpha_{\text{cm}}} \right)^2 \Leftrightarrow$$

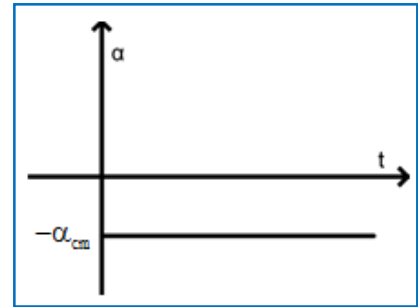
$$\Leftrightarrow x = \frac{u_0 \cdot u_{\text{cm}} - u_0^2}{\alpha_{\text{cm}}} + \frac{1}{2} \cancel{\alpha_{\text{cm}}} \frac{u_{\text{cm}}^2 - 2u_0 \cdot u_{\text{cm}} + u_0^2}{\alpha_{\text{cm}}^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{u_0 u_{\text{cm}} - u_0^2}{\alpha_{\text{cm}}} + \frac{u_{\text{cm}}^2 - 2u_{\text{cm}} u_0 + u_0^2}{2\alpha_{\text{cm}}} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\cancel{2u_0 u_{\text{cm}}} - 2u_0^2 + u_{\text{cm}}^2 - \cancel{2u_{\text{cm}} u_0} + u_0^2}{2\alpha_{\text{cm}}} \Leftrightarrow x = \frac{u_{\text{cm}}^2 - u_0^2}{2\alpha_{\text{cm}}}$$

✱ **Ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη**

α) $\alpha_{\text{cm}} = \text{σταθερή}$



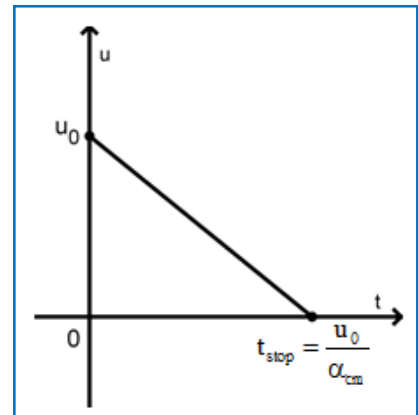
β) $u_{\text{cm}} = u_0 - \alpha_{\text{cm}} t$

Για $t = 0$ είναι $u_{\text{cm}} = u_0$

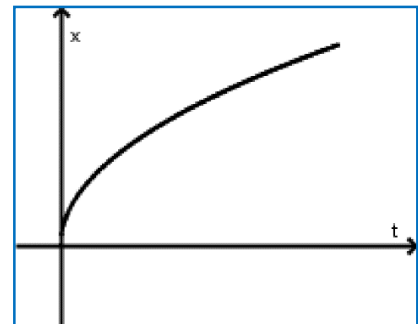
Για $u_{\text{cm}} = 0 \Leftrightarrow 0 = u_0 - \alpha_{\text{cm}} t \Leftrightarrow t = \frac{u_0}{\alpha_{\text{cm}}}$

Τον χρόνο αυτόν τον ονομάζουμε και $t_{\text{(stop)}}$

Δηλαδή $t_{\text{stop}} = \frac{u_0}{\alpha_{\text{cm}}}$



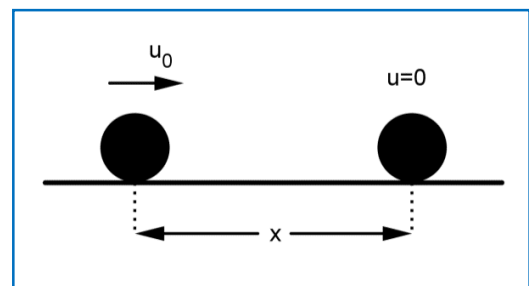
γ) $x = u_0 t - \frac{1}{2} \alpha_{\text{cm}} t^2$



δ) $\Sigma F = m \cdot \alpha_{\text{cm}}$ (στον άξονα κίνησης)

ε) Πως βρίσκεται το διάστημα που διανύει ένα σώμα **μέχρι να σταματήσει**

Η σχέση είναι: $x_{\text{stop}} = \frac{u_0^2}{2\alpha_{\text{cm}}}$



Απόδειξη

$$\cancel{u_{\text{cm}}}^0 = u_0 - \alpha_{\text{cm}} t \Leftrightarrow \alpha_{\text{cm}} t = u_0 \Leftrightarrow t = \frac{u_0}{\alpha_{\text{cm}}}$$

$$x = u_0 t - \frac{1}{2} \alpha_{\text{cm}} t^2 \Leftrightarrow x = u_0 \frac{u_0}{\alpha_{\text{cm}}} - \frac{1}{2} \cancel{\alpha_{\text{cm}}} \frac{u_0^2}{\cancel{\alpha_{\text{cm}}}^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{u_0^2}{a_{cm}} - \frac{u_0^2}{2a_{cm}} \Leftrightarrow x = \frac{2u_0^2 - u_0^2}{2a_{cm}} \Leftrightarrow x = \frac{u_0^2}{2a_{cm}}$$

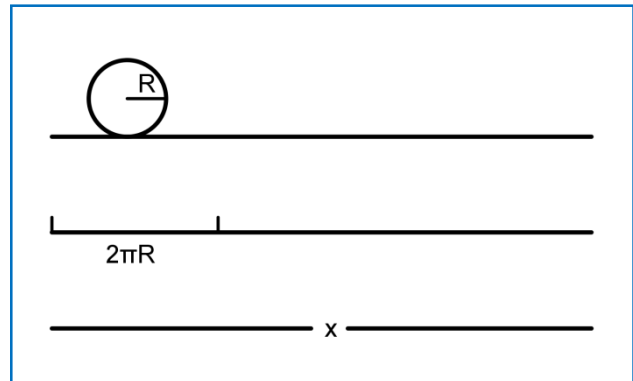
στ) Πως βρίσκεται ο αριθμός των στροφών που διανύει ένας τροχός

1 κύκλος έχει μήκος $2\pi R$

N κύκλοι x_{cm}

$$N \cdot 2\pi R = x_{cm} \Leftrightarrow N = \frac{x_{cm}}{2\pi R}$$

Αριθμός κύκλων ή περιστροφών λόγω μεταφορικής κίνησης.

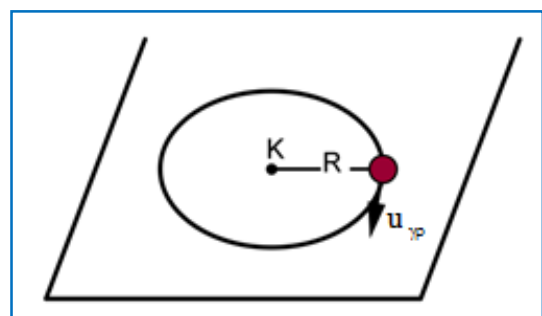
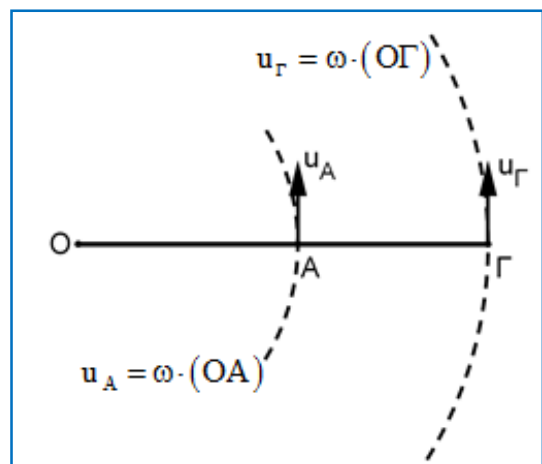


3.3. Περιστροφική κίνηση.

α) Είναι κάθε κίνηση που το κάθε σημείο του σώματος έχει διαφορετική ταχύτητα.

Η ταχύτητα που έχει ένα σημείο στην περιφέρεια, λέγεται γραμμική ταχύτητα ή επιτρόχια ταχύτητα και δίνεται από τη

σχέση: $u_{\gamma p} = \omega \cdot R$

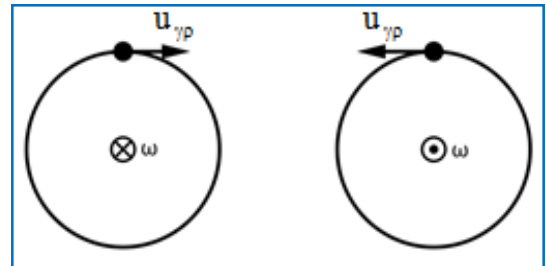
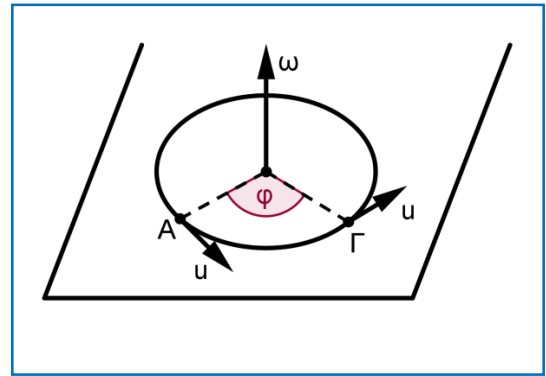


β) Πως ορίζεται η γωνιακή ταχύτητα
Είναι το φυσικό διανυσματικό μέγεθος ($\vec{\omega}$)

και έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

1. Σημείο Εφαρμογής: Στο κέντρο της κυκλικής τροχιάς.
2. Διεύθυνση: $\perp$ στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς
3. Φορά: που βρίσκεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.
4. Μέτρο: που δίνεται από τη σχέση:

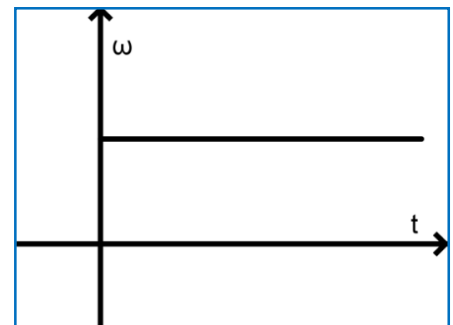
$$\omega = \frac{\phi}{t} \left(\text{rad/s} \right) \text{ και } \phi = \omega t$$



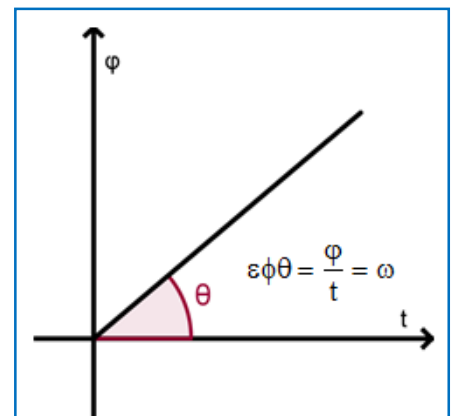
3.4. Εξισώσεις περιστροφικής κίνησης.

✧ Ομαλή κυκλική κίνηση

α) $\omega = \Sigma \Delta \Theta$



β) $\phi = \omega t$



γ) $\Sigma \tau = 0$

Οι αναλογίες Μεταφορικής – περιστροφικής κίνησης είναι:

$$u_{cm} \rightarrow \omega$$

$$x \rightarrow \varphi$$

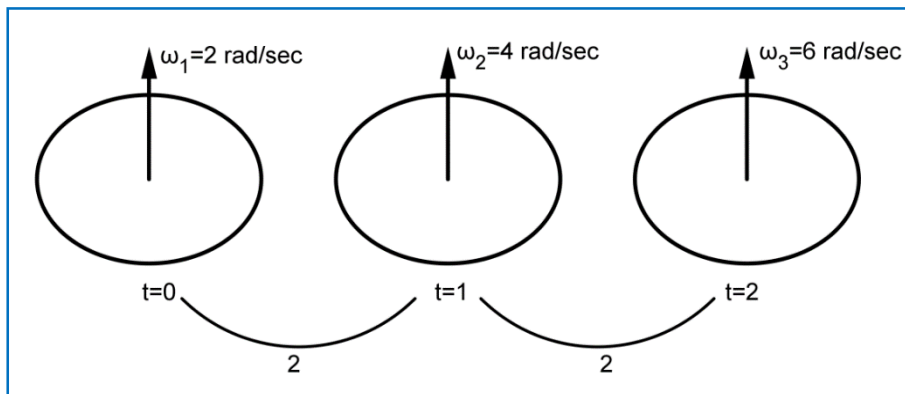
$$F \rightarrow \tau (\text{ροπή})$$

✳ Ομαλή επιταχυνόμενη κυκλική κίνηση

⇒ Τι είναι γωνιακή επιτάχυνση

Είναι το φυσικό διανυσματικό μέγεθος $(\vec{\alpha}_\gamma)$ και έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

α) Μας δείχνει τον ρυθμό μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας



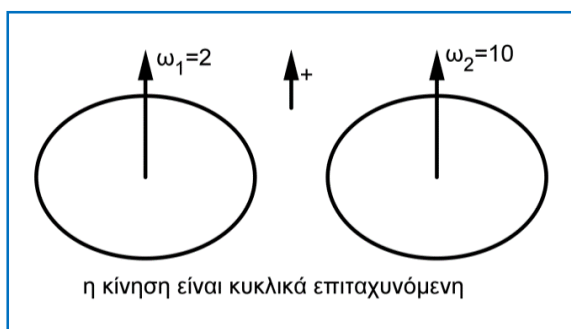
Δηλαδή

$$\alpha_\gamma = 2 \text{ rad/s}^2$$

β) Σημείο εφαρμογής: Στο κέντρο της κυκλικής τροχιάς

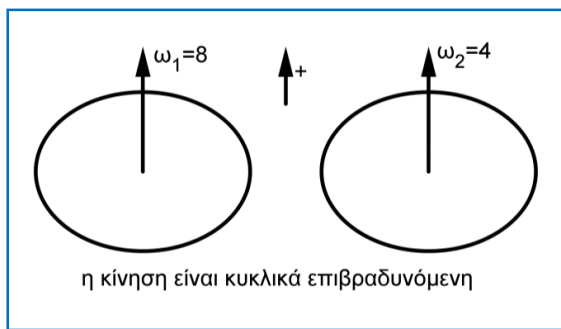
γ) Διεύθυνση: $\perp$ στο επίπεδο της τροχιάς.

δ) Φορά: που ταυτίζεται πάντα με την μεταβολή της $(\Delta\vec{\omega})$



$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 10 - 2 = 8$$

$$\alpha_\gamma \text{ \& } \Delta\omega \uparrow\uparrow$$



$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 4 - 8 = -4$$

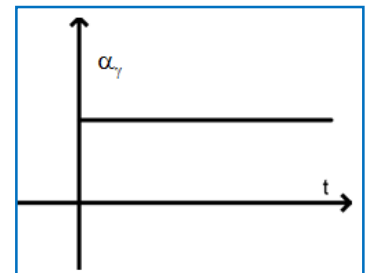
$$\alpha_\gamma \text{ \& } \Delta\omega \uparrow \downarrow$$

ε) Μέτρο που δίνεται από την σχέση: $\alpha_\gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} (\text{rad/s}^2)$ ή

$$\vec{\alpha}_\gamma = \frac{\vec{\omega}_{\text{τελ}} - \vec{\omega}_{\text{αρχ}}}{\Delta t}$$

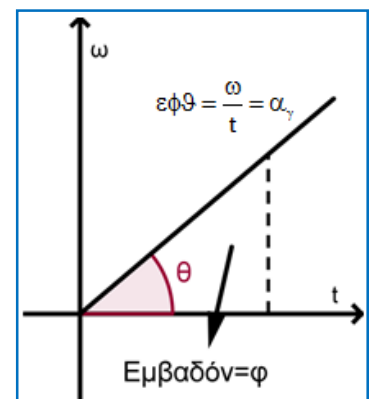
⇒ Εξισώσεις ομαλής κυκλικής επιταχυνόμενης κίνησης

α) $\alpha_\gamma = \text{σταθερή}$

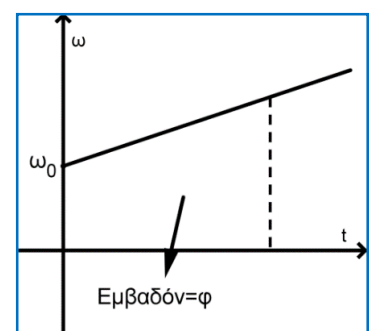


β) Τελική γωνιακή ταχύτητα = αρχική γωνιακή ταχύτητα + $\alpha \Delta t$
(όπου Δt = διαφορά χρόνου μεταξύ της τελικής – αρχικής γωνιακής ταχύτητας)

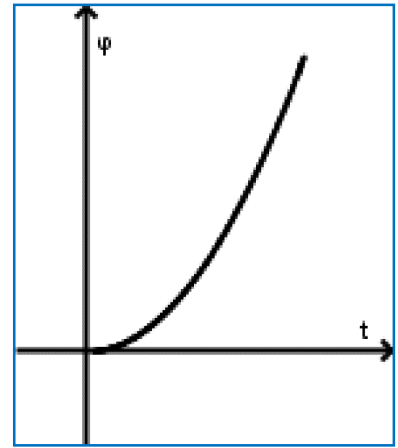
$$\omega = \alpha_\gamma t$$



$$\omega = \omega_0 + \alpha_\gamma t$$



$$\gamma) \quad \varphi = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma} t^2 \quad \text{ή} \quad \varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma} t^2$$



$$\delta) \quad \text{Χρήσιμη σχέση όπου δεν έχουμε τον χρόνο} \quad \varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha_{\gamma}}$$

Απόδειξη

$$\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma} t \Leftrightarrow \omega - \omega_0 = \alpha_{\gamma} t \Leftrightarrow t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha_{\gamma}}$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma} t^2 \Leftrightarrow \varphi = \omega_0 \left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha_{\gamma}} \right) + \frac{1}{2} \cancel{\alpha_{\gamma}} \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\alpha_{\gamma}^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \frac{\omega_0 \omega - \omega_0^2}{\alpha_{\gamma}} + \frac{\omega^2 - 2\omega_0 \omega + \omega_0^2}{2\alpha_{\gamma}} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\cancel{2\omega_0 \omega} - 2\omega_0^2 + \omega^2 - \cancel{2\omega_0 \omega} + \omega_0^2}{2\alpha_{\gamma}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha_{\gamma}}$$

⇒ Εξισώσεις της ομαλής επιβραδυνόμενης περιστροφικής κίνησης

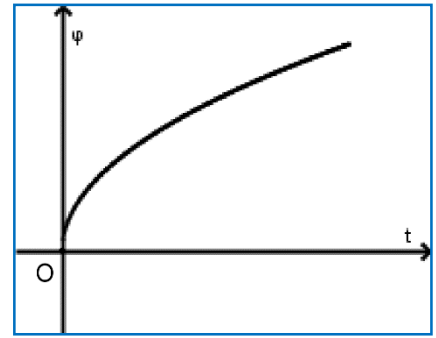
$$\alpha) \quad \omega = \omega_0 - \alpha_{\gamma} t$$

για να βρούμε τον t που σταματάει το κινητό, αρκεί να θέσουμε στην εξίσωση

$$\omega = 0 \Leftrightarrow 0 = \omega_0 - \alpha_{\gamma} t_{\text{stop}} \Leftrightarrow t_{\text{stop}} = \frac{\omega_0}{\alpha_{\gamma}}$$



β) $\varphi = \omega_0 t - \frac{1}{2} \alpha_\gamma t^2$



γ) Εύρεση της ολικής γωνίας μέχρι να σταματήσει η κίνηση

$$\omega^0 = \omega_0 - \alpha_\gamma t \Leftrightarrow 0 = \omega_0 - \alpha_\gamma t \Leftrightarrow \alpha_\gamma t = \omega_0 \Leftrightarrow t = \frac{\omega_0}{\alpha_\gamma}$$

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{1}{2} \alpha_\gamma t^2 \Leftrightarrow \varphi = \omega_0 \frac{\omega_0}{\alpha_\gamma} - \frac{1}{2} \alpha_\gamma \frac{\omega_0^2}{\alpha_\gamma^2} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\omega_0^2}{\alpha_\gamma} - \frac{\omega_0^2}{2\alpha_\gamma} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \frac{2\omega_0^2 - \omega_0^2}{2\alpha_\gamma} \Leftrightarrow \varphi_{\text{stop}} = \frac{\omega_0^2}{2\alpha_\gamma}$$

δ) Εύρεση του αριθμού των περιστροφών λόγω περιστροφικής κίνησης

1 στροφή η επίκεντρη γωνία διαγράφει 2π

N φ

$$\varphi = N \cdot 2\pi \Leftrightarrow N = \frac{\varphi}{2\pi}$$

